Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ) Γ΄ Λυκείου
Μαθηματικά προσανατολισμού

Λύσεις

46 Ασκήσεις

28-11-2022

Ασκησόπολις

Στέλιος Μιχαήλογλου

Αντίστροφη συνάρτηση

Θέμα 2ο

23196.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

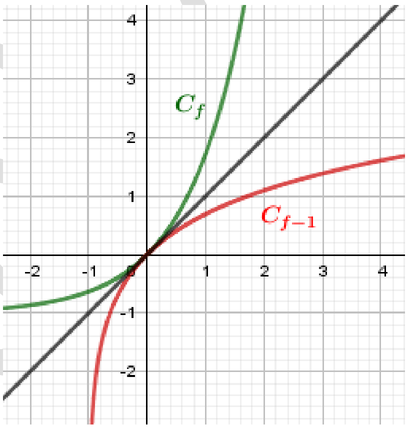
β) Να βρείτε την f^{-1}. (Μονάδες 9)

Έστω $f^{-1}(x)=\ln(x+1),\ x>-1$.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1}. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $e^{x_1}<e^{x_2}\Leftrightarrow e^{x_1}-1<e^{x_2}-1\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f$ 1−1, άρα η f αντιστρέφεται.



β) Θέτουμε $f(x)=y,\ y\in\mathbb{R}$ και έχουμε: $e^x-1=y\Leftrightarrow e^x=y+1\ (1)$.
Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^x>0\Leftrightarrow y+1>0\Leftrightarrow y>-1$.
Τότε η (1) γίνεται: $x=\ln(y+1)$, άρα $f^{-1}(y)=\ln(y+1),\ y>-1$,
οπότε $f^{-1}(x)=\ln(x+1),\ x>-1$.

γ) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y=e^x$ κατά 1 μονάδα προς τα κάτω. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y=\ln x$ κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά.

23198.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}-1,\ x\ge 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την f^{-1}. (Μονάδες 9)

Έστω $f^{-1}(x)=(x+1)^2,\ x\ge -1$

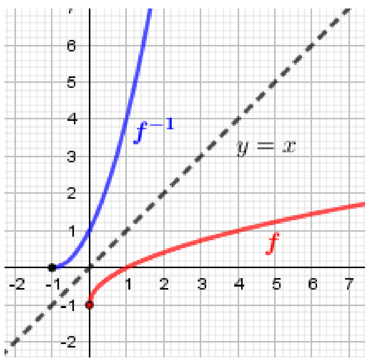
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1}. (Μονάδες 9)

Λύση

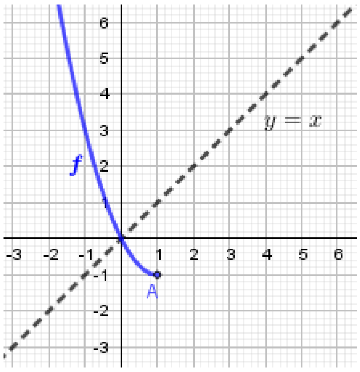
α) Για κάθε $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι
$\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}\Leftrightarrow\sqrt{x_1}-1<\sqrt{x_2}-1\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow[0,+\infty)\Rightarrow f$ 1−1, άρα η f αντιστρέφεται.

β) Για κάθε $x\ge 0$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{x}-1=y\Leftrightarrow\sqrt{x}=y+1\ (1)$.
Είναι $\sqrt{x}\ge 0\Leftrightarrow y+1\ge 0\Leftrightarrow y\ge -1$, τότε η (1) γίνεται: $x=(y+1)^2\ge 0$, άρα $f^{-1}(y)=(y+1)^2,\ y\ge -1$
οπότε $f^{-1}(x)=(x+1)^2,\ x\ge -1$.

γ) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y=\sqrt{x}$ κατά 1 μονάδα προς τα κάτω. Η γραφική παράσταση της f^{-1} προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y=x^2$ κατά 1 μονάδα αριστερά.



23209.Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2-1,\ x\le 1$.



α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$. **(Μονάδες 9)**

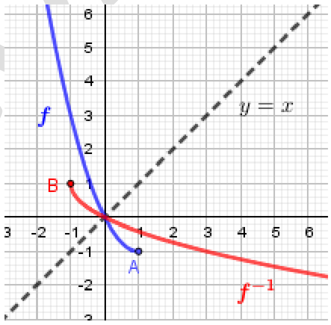
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . **(Μονάδες 8)**

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να μεταφέρετε στην κόλλα σας ή στο φύλλο απαντήσεων το παρακάτω σχήμα με την γραφική παράσταση της f και το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Για κάθε $x_1<x_2\le 1$είναι $x_1-1<x_2-1\le 0\Rightarrow (x_1-1)^2>(x_2-1)^2 \Leftrightarrow (x_1-1)^2-1>(x_2-1)^2-1\Leftrightarrow$ $f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f\searrow(-\infty,1]$

β) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα σημεία της παραβολής $y=(x-1)^2-1$ με $x\le 1$. Η παραβολή έχει κορυφή το σημείο Κ(1, - 1) στο οποίο παρουσιάζει ελάχιστο, αφού $y=(x-1)^2-1=x^2-2x+1-1=x^2-2x$, άρα η f έχει σύνολο τιμών το $[-1,+\infty)$.



γ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι η συμμετρική της C_f ως προς την ευθεία y = x.

23216.Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,8)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. **(Μονάδες 7)**

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα x΄x και για ποιες είναι πάνω από τον x΄x. **(Μονάδες 8)**

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x)>0$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Επειδή η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,8)$, ισχύει ότι $f(3)=0$ και $f(0)=8$.

Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Είναι $0<3\Leftrightarrow f(0)<f(3)\Leftrightarrow 8<0$ άτοπο. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, είναι γνησίως φθίνουσα.

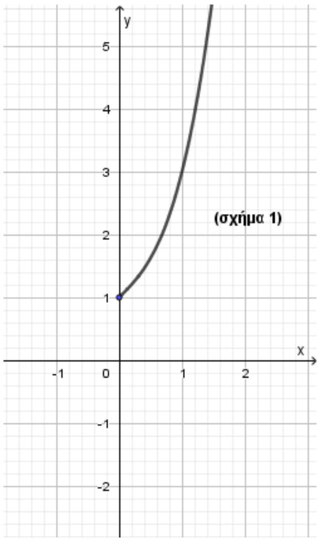
β) Η C_f βρίσκεται κάτω από τον x΄x, όταν $f(x)<0\Leftrightarrow f(x)<f(3)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} x>3$ και πάνω από τον x΄x, όταν $f(x)>0\Leftrightarrow f(x)>f(3)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} x<3$.

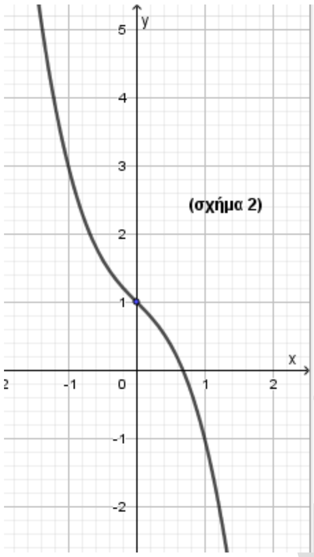
γ) $f(\ln x)>0\Leftrightarrow f(\ln x)>f(3)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}\ln x<3\Leftrightarrow 0<x<e^3$

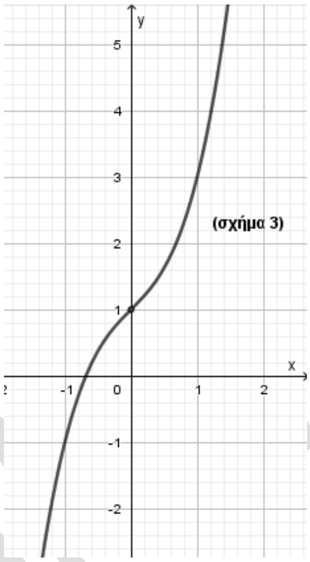
23642.Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^3+x+1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 07)

β) Ένα από τα παρακάτω σχήματα παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Να βρείτε ποιο είναι και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.







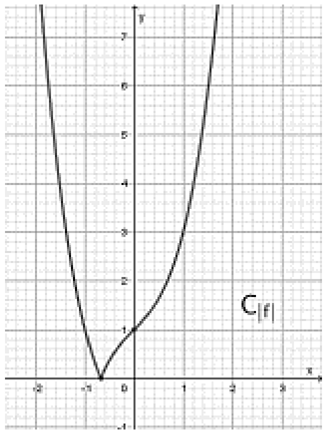
(Μονάδες 07)

γ) i. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $|f|$. (Μονάδες 06)

ii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $|f|$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $|x^3+x+1|=2023$. (Μονάδες 05)

Λύση

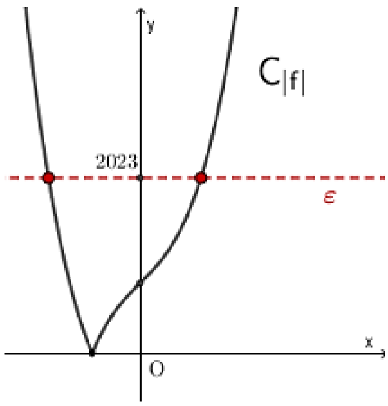
α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1+1<x_2+1$ (1) και $x_1^3<x_2^3$ (2).
Από $(1)+(2)\Rightarrow x_1^3+x_1+1<x_2^3+x_2+1\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.



β) Στο σχήμα 1 η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ οπότε δεν είναι η γραφική παράσταση της f.
Η συνάρτηση του σχήματος 2 είναι γνησίως φθίνουσα οπότε δεν είναι η γραφική παράσταση της f.
Επομένως στο σχήμα 3 είναι η C_f.

γ) i. Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα σημεία της C_f που δεν είναι κάτω από τον άξονα x΄x και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα , των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

ii. $|x^3+x+1|=2023\Leftrightarrow|f(x)|=2023$.



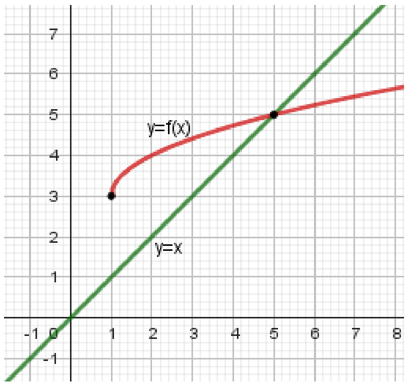
Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης είναι το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της $|f|$ με την ευθεία y = 2023.
Κατασκευάζοντας την ευθεία y = 2023 στο ίδιο σχήμα με την $|f|$ βλέπουμε ότι έχουν δύο κοινά σημεία, επομένως η εξίσωση $|f(x)|=2023$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

24130.Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\sqrt{x-1}+3,\ x\geq 1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$. **(Μονάδες 07)**

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών καθώς και την αντίστροφη της f. **(Μονάδες 10)**

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f καθώς και η διχοτόμος $y=x$ της γωνίας xOy.
Αφού μεταφέρετε το σχέδιο στην κόλλα σας, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f^{-1} και με βάση το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f,\ f^{-1}$. **(Μονάδες 08)**



Λύση

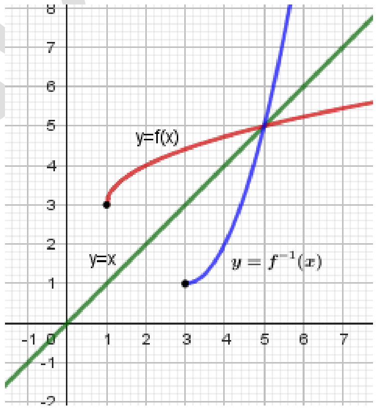
α) Για κάθε $x_1,x_2\in[1,+\infty)$ με $x_1<x_2$, είναι $x_1-1<x_2-1\Leftrightarrow\sqrt{x_1-1}<\sqrt{x_2-1}\Leftrightarrow$ $\sqrt{x_1-1}+3<\sqrt{x_2-1}+3\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, άρα είναι και 1-1.

β) Για κάθε $x\geq 1$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{x-1}+3=y\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=y-3$ (1).

Είναι $y-3\geq 0\Leftrightarrow y\geq 3$, τότε η (1) γίνεται: $x-1=(y-3)^2\Leftrightarrow x=(y-3)^2+1$

Είναι $x\geq 1\Leftrightarrow(y-3)^2+1\geq 1\Leftrightarrow(y-3)^2\geq 0$ ισχύει. Άρα η f έχει σύνολο τιμών το $f(A)=[3,+\infty)$.

Είναι $f^{-1}(y)=(y-3)^2+1,\ y\geq 3$ άρα $f^{-1}(x)=(x-3)^2+1,\ x\geq 3$.



γ) Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι η συμμετρική της f ως προς την ευθεία y=x. Στο σχήμα βλέπουμε ότι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, f^{-1} είναι το (5,5).

24569.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f=[0,1]$. **(Μονάδες 05)**

β) i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι "1 – 1". **(Μονάδες 10)**

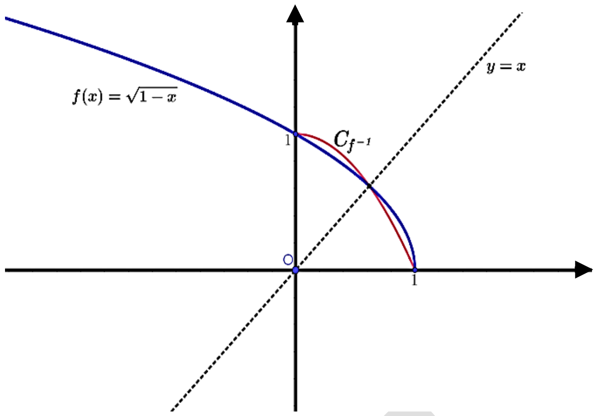
ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x))=0,\ x\in[0,1]$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $1-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 1$ και $1-\sqrt{1-x}\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{1-x}\leq 1\Leftrightarrow 1-x\leq 1\Leftrightarrow x\geq 0$, άρα $D_f=[0,1]$.

β) i. Για κάθε $x_1,x_2\in[0,1]$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι $\sqrt{1-\sqrt{1-x_1}}=\sqrt{1-\sqrt{1-x_2}}\Leftrightarrow$ $1-\sqrt{1-x_1}=1-\sqrt{1-x_2}\Leftrightarrow\sqrt{1-x_1}=\sqrt{1-x_2}\Leftrightarrow 1-x_1=1-x_2\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow f\ 1-1$.

ii. $f(f(x))=0\Leftrightarrow f(f(x))=f(0)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(0)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}x=0$



24703.Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{1-x}$ και $x\in(-\infty,1]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1}. **(Μονάδες 8)**

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}. **(Μονάδες 10)**

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και ένα τμήμα της γραφικής παράστασης της f^{-1}.
Να μεταφέρετε στο φύλλο απαντήσεων το παραπάνω σχήμα και το οποίο να συμπληρώσετε με την υπόλοιπη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,1]$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι $\sqrt{1-x_1}=\sqrt{1-x_2}\Leftrightarrow 1-x_1=1-x_2\Leftrightarrow$ $-x_1=-x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1 και υπάρχει η αντίστροφή της f^{-1}.

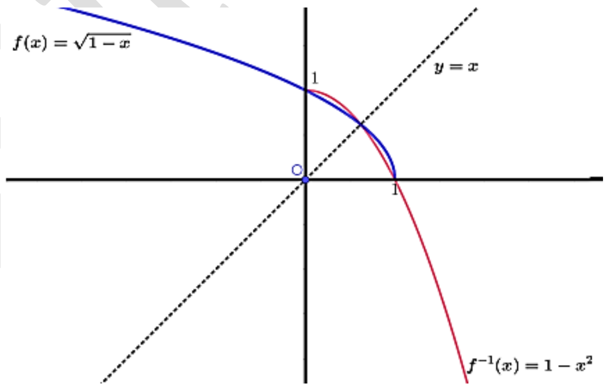
β) Για κάθε $x\in(-\infty,1]$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=y$.

Για $y\ge 0$ είναι $1-x=y^2\Leftrightarrow 1-y^2=x$.

Είναι $x\le 1\Leftrightarrow 1-y^2\le 1\Leftrightarrow y^2\ge 0$ ισχύει για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

Άρα $f^{-1}(y)=1-y^2,\ y\ge 0$, οπότε

$f^{-1}(x)=1-x^2,\ x\ge 0$



γ) Επειδή οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x, προκύπτει το διπλανό σχήμα.

24991.Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(x)=-2\ln x+1,\ x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται. **(Μονάδες 08)**

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}. **(Μονάδες 09)**

γ) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=1-\ln x^2$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f=g$. **(Μονάδες 08)**

Λύση

α) Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι $-2\ln x_1+1=-2\ln x_2+1\Leftrightarrow -2\ln x_1=-2\ln x_2\Leftrightarrow \ln x_1=\ln x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

β) Για κάθε x > 0 είναι $f(x)=y\Leftrightarrow -2\ln x+1=y\Leftrightarrow -2\ln x=y-1\Leftrightarrow \ln x=\dfrac{1-y}{2}\Leftrightarrow x=e^{\frac{1-y}{2}}$.

Άρα $f^{-1}(y)=e^{\frac{1-y}{2}},\ y\in\mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(x)=e^{\frac{1-x}{2}},\ x\in\mathbb{R}$.

γ) Η συνάρτηση g ορίζεται όταν $x^2>0\Leftrightarrow x\ne 0$ άρα $A_g=\mathbb{R}^*$.

Επειδή $A_f \neq A_g$ οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες.

όταν όμως $x \in (0,+\infty)$ τότε $g(x) = 1 - \ln x^2 = 1 - 2\ln x = f(x)$.

Θέμα 4ο

23200.Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1, \ln 2)$.

α) Να βρείτε τη μονοτονία της. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό α ισχύει $f(\alpha \ln \alpha) \leq f(\ln \alpha)$. (Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(e^{x-1} + \ln x\right) = \ln 2$. (Μονάδες 6)

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + (3 - \ln 2)x - 3,\ x \in \mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση g δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Επειδή η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1, \ln 2)$ είναι $f(0) = 3$ και $f(1) = \ln 2$.

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και $0 < 1$ με $f(0) > f(1)$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $f(\alpha \ln \alpha) \leq f(\ln \alpha) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} \alpha \ln \alpha \geq \ln \alpha \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha - \ln \alpha \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)\ln \alpha \geq 0$

Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\alpha - 1 < 0,\ \ln\alpha < 0$, οπότε $(\alpha - 1)\ln \alpha > 0$.

Αν $\alpha \geq 1$ τότε $\alpha - 1 \geq 0,\ \ln\alpha \geq 0$, οπότε $(\alpha - 1)\ln \alpha \geq 0$, οπότε για κάθε $\alpha > 0$ είναι $(\alpha - 1)\ln \alpha \geq 0$.

γ) $f\left(e^{x-1} + \ln x\right) = \ln 2 \Leftrightarrow f\left(e^{x-1} + \ln x\right) = f(1) \overset{f\searrow \Rightarrow 1-1}{\Leftrightarrow} e^{x-1} + \ln x = 1 \quad (1)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^{x-1} + \ln x,\ x > 0$.

Για κάθε $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$ είναι $x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow e^{x_1 - 1} < e^{x_2 - 1}$ και $\ln x_1 < \ln x_2$, οπότε και $e^{x_1 - 1} + \ln x_1 < e^{x_2 - 1} + \ln x_2 \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2) \Leftrightarrow h \nearrow (0,+\infty) \Rightarrow h\ 1-1$.

Η (1) γίνεται: $h(x) = h(1) \overset{h\ 1-1}{\Leftrightarrow} x = 1$.

δ) Είναι $g(0) = f(0) + (3 - \ln 2)\cdot 0 - 3 = 3 - 3 = 0$ και $g(1) = f(1) + 3 - \ln 2 - 3 = \ln 2 - \ln 2 = 0$.

Επειδή $g(0) = g(1)$ η g δεν είναι 1-1, οπότε δεν αντιστρέφεται.

Askisopolis

Όριο συνάρτησης στο x_0

Θέμα 2ο

24768.Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους $f(x)=x^2-x+1$ και $g(x)=\sqrt{4x-3}$.

α) Να αποδείξτε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\geq\frac{3}{4}$. **(Μονάδες 6)**

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $h=g\circ f$. **(Μονάδες 9)**

γ) Αν $h(x)=|2x-1|$ είναι η σύνθεση του ερωτήματος β), να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\frac{h(x)-1}{\sqrt{x+1}-1}$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow x^2-x+1\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow 4x^2-4x+4\geq3\Leftrightarrow 4x^2-4x+1\geq0\Leftrightarrow$

$(2x-1)^2\geq0$ ισχύει.

β) Η g ορίζεται όταν $4x-3\geq0\Leftrightarrow 4x\geq3\Leftrightarrow x\geq\frac{3}{4}$, άρα $A_g=\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$.

Είναι $A_h=\{x\in A_f\,/\,f(x)\in A_g\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)\geq\frac{3}{4}\right\}=\mathbb{R}$ και

$h(x)=g(f(x))=\sqrt{4(x^2-x+1)-3}=\sqrt{4x^2-4x+4-3}=\sqrt{4x^2-4x+1}\Leftrightarrow h(x)=\sqrt{(2x-1)^2}=|2x-1|$

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to0}(2x-1)=-1$ άρα $2x-1<0$ για τιμές του x πολύ κοντά στο μηδέν, άρα

$$\lim_{x\to0}\frac{h(x)-1}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{-2x+1-1}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{-2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{-2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1^2}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{-2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1}=\lim_{x\to0}\frac{-2\cancel{x}\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\cancel{x}}=-4$$

Μη πεπερασμένο όριο στο x_0

Θέμα 2ο

23217.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x-1)$ και $g(x)=\frac{1}{x-1}$.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ (Μονάδες 7) **ii. $\lim\limits_{x\to1}g(x)$ (Μονάδες 8)**

β) Να βρείτε

i. το πεδίο ορισμού της $f\cdot g$ (Μονάδες 4) **ii. το $\lim\limits_{x\to1}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$. (Μονάδες 6)**

Λύση

α) i. $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln(x-1)\underset{\substack{x\to1^+\Rightarrow\\ u\to0^+}}{\overset{x-1=u}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty$

ii. $\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}\underset{\substack{x\to1^-\Rightarrow\\ u\to0^-}}{\overset{x-1=u}{=}}\lim\limits_{u\to0^-}\frac{1}{u}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}\underset{\substack{x\to1^+\Rightarrow\\ u\to0^+}}{\overset{x-1=u}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\frac{1}{u}=+\infty$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

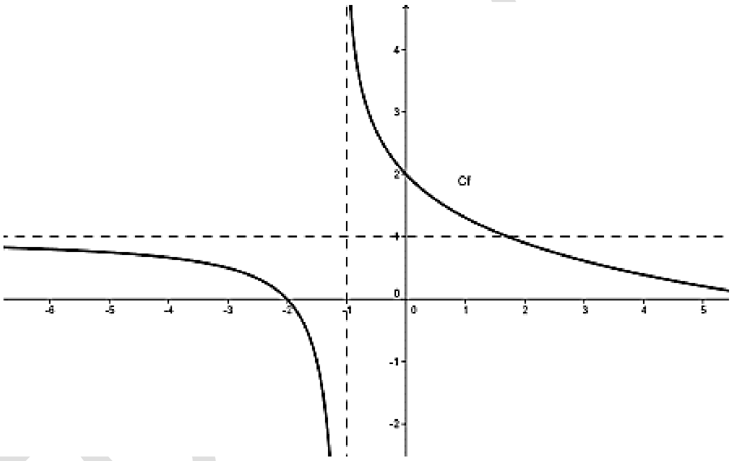
β) i. $A_{f\cdot g} = A_f \cap A_g = (1,+\infty) \cap \mathbb{R} - \{1\} = (1,+\infty)$

ii. $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to 1}\left[\ln(x-1)\dfrac{1}{x-1}\right] = -\infty\cdot(+\infty) = -\infty$

Όριο στο άπειρο

Θέμα 2ο

23314. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη – 2. και τον άξονα y'y σε ένα μόνο σημείο με τεταγμένη 2.



α) Από την γραφική παράσταση ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να προσδιορίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{1}{f(x)}$ **(Μονάδες 6)** **ii)** $\lim\limits_{x\to -2^-} \ln(f(x))$ **(Μονάδες 7)**

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) i) Στο σχήμα βλέπουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$, άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$.

ii) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0$ **iii)** $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 0$

β) Θέτουμε $f(x) = u$.

i. Είναι $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-2,-1)$, άρα $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{u\to 0^-} \dfrac{1}{u} = -\infty$

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x < -2$, άρα $\lim\limits_{x\to -2^-} \ln(f(x)) = \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

23641.Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) < f(x)$. **(Μονάδες 08)**

β) Αν $\alpha^2 < \alpha$, τότε να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\left[f(\alpha^2-\alpha) - f(0)\right]x\right) = -\infty$. **(Μονάδες 09)**

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x - 1) = f(0)$. **(Μονάδες 08)**

Λύση

α) $f\left(x^2\right)<f\left(x\right)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x^2<x\Leftrightarrow x^2-x<0\Leftrightarrow x\left(x-1\right)<0\Leftrightarrow 0<x<1$

β) Είναι $\alpha^2<\alpha\Leftrightarrow\alpha^2-\alpha<0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f\left(\alpha^2-\alpha\right)<f\left(0\right)\Leftrightarrow f\left(\alpha^2-\alpha\right)-f\left(0\right)<0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left[f\left(\alpha^2-\alpha\right)-f\left(0\right)\right]x\right)=-\infty$

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ είναι και 1-1, οπότε:

$f\left(e^x-1\right)=f\left(0\right)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$

Συνέχεια Συνάρτησης

Θέμα 2ο

24767.Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{1}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 13)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $e^{x_1}<e^{x_2}\Leftrightarrow e^{x_1}+1<e^{x_2}+1\Leftrightarrow\dfrac{1}{e^{x_1}+1}>\dfrac{1}{e^{x_2}+1}\Leftrightarrow$

$f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)\Leftrightarrow f\searrow\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x+1}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x+1}=0$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα έχει σύνολο τιμών το $f\left(\mathbb{R}\right)=\left(0,1\right)$.

β) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και , είναι $\dfrac{1}{e^x+1}=y\Leftrightarrow e^x+1=\dfrac{1}{y}\Leftrightarrow e^x=\dfrac{1}{y}-1\Leftrightarrow x=\ln\dfrac{1-y}{y}$.

Άρα $f^{-1}\left(y\right)=\ln\dfrac{1-y}{y}$, $y\in\left(0,1\right)$, οπότε $f^{-1}\left(x\right)=\ln\dfrac{1-x}{x}$, $x\in\left(0,1\right)$. $f\left(x\right)=y\in\left(0,1\right)$

Θέμα 4ο

23106.Δίνεται η συνάρτηση g με $g\left(x\right)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in\left[-1,1\right]$ και η συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο $\left[0,\pi\right]$, με $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, τέτοιες ώστε:

$\left(g\circ f\right)\left(x\right)=\left|\sigma\upsilon\nu x\right|$, για κάθε $x\in\left[0,\pi\right]$.

α) i. Να αποδείξετε ότι $\left|f\left(x\right)\right|=\left|\eta\mu x\right|$. (Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f\left(x\right)=0$. (Μονάδες 03)

β) Να βρείτε την συνάρτηση f. (Μονάδες 09)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h:\left(0,\pi\right]\to\mathbb{R}$ με $h\left(x\right)=\dfrac{1}{f\left(x\right)-x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο: $\lim\limits_{x\to0}h\left(x\right)$. (Μονάδες 07)

Λύση

α) i. $(g\circ f)(x)=|\sigma\upsilon\nu x| \Leftrightarrow \sqrt{1-f^2(x)}=|\sigma\upsilon\nu x| \Leftrightarrow 1-f^2(x)=\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$
$f^2(x)=1-\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow f^2(x)=\eta\mu^2 x \Leftrightarrow |f(x)|=|\eta\mu x|$ (1)

ii. $f(x)=0 \Leftrightarrow |f(x)|=0 \Leftrightarrow |\eta\mu x|=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\pi$

β) Για κάθε $x\in(0,\pi)$ είναι $f(x)\neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Επειδή $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1>0$ είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ και επειδή $\eta\mu>0$ στο $(0,\pi)$ η σχέση (1) γίνεται $f(x)=\eta\mu x,\ x\in(0,\pi)$. Επομένως $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0 \text{ ή } \pi\end{cases}=\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$.

γ) Γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x|\leq|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το ίσον ισχύει μόνο για x = 0, άρα για κάθε $x\in[0,\pi]$ είναι $\eta\mu x\leq x \Leftrightarrow \eta\mu x - x\leq 0$.

$$\lim_{x\to 0}h(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\eta\mu x - x}\underset{\substack{x\to 0^+ \Rightarrow\\ u\to 0^- \Rightarrow}}{\overset{\eta\mu x - x=u}{=}}\lim_{u\to 0^-}\frac{1}{u}=-\infty$$

Θέμα 3ο

24761.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2023-\dfrac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$**, η οποία είναι συνεχής στο** $\mathbb{R}$**.**

α) Να δείξετε ότι $\alpha=2022$. (Μονάδες 7)
β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. (Μονάδες 8)
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2022$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι και στο x = 0, άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0) \Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to 0}\left(2023-\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\alpha \Leftrightarrow 2023-1=\alpha \Leftrightarrow \alpha=2022$$

β) Για κάθε x > 0 είναι $-1\leq\eta\mu x\leq 1 \Leftrightarrow -1\geq-\eta\mu x\geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\leq-\frac{\eta\mu x}{x}\leq-\frac{1}{x} \Leftrightarrow$

$2023+\frac{1}{x}\leq 2023-\frac{\eta\mu x}{x}\leq 2023-\frac{1}{x} \Leftrightarrow 2023+\frac{1}{x}\leq f(x)\leq 2023-\frac{1}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2023+\frac{1}{x}\right)=2023$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2023-\frac{1}{x}\right)=2023$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2023$.

γ) Επειδή $f(0)=2022$, η x = 0 είναι λύση της εξίσωσης $f(x)=2022$.

Για $x\neq 0$ είναι $f(x)=2022 \Leftrightarrow 2023-\frac{\eta\mu x}{x}=2022 \Leftrightarrow 1=\frac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow \eta\mu x=x$ που είναι αδύνατη αφού για κάθε $x\neq 0$ είναι $|\eta\mu x|<|x| \Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x$.

Ορισμός παραγώγου

Θέμα 2ο

24756.Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=2$.
(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$. **(Μονάδες 8)**

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}$. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$, άρα $f'(0)=2$.

β) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x = 0 είναι και συνεχής σε αυτό άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=\frac{2}{1}=2$

24757.Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ σχηματίζει με τον xx' γωνία 45°.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$. **(Μονάδες 8)**

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,1)$. **(Μονάδες 8)**

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=1$. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Επειδή η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ σχηματίζει με τον xx' γωνία 45° είναι $f'(0)=\varepsilon\varphi 45^\circ=1$.

β) ε: $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y-1=x\Leftrightarrow y=x+1$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$

Κανόνες παραγώγισης

Θέμα 4ο

23375.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. **(Μονάδες 06)**

β) Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $\mathbb{R}$. **(Μονάδες 13)**

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}\left(x+f(x)\right)>x$, $x\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 06)**

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)'}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}-1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{-\cancel{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}}{\cancel{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}\sqrt{x^2+1}}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)<0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)\right]=+\infty$

άρα θέτοντας $\sqrt{x^2+1}-x=u$, είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=0$ άρα θέτοντας $\sqrt{x^2+1}-x=u$, είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$, οπότε η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

γ) $f^{-1}\left(x+f(x)\right)>x\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f\left(f^{-1}\left(x+f(x)\right)\right)<f(x)\Leftrightarrow x+f(x)<f(x)\Leftrightarrow x<0$

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Θέμα 2ο

24283.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-3, & \text{αν } x\in[-1,2] \\ x-1, & \text{αν } x\in(2,5] \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=2$. (Μονάδες 09)

γ) Να εξετάσετε ποιες από τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, ικανοποιεί η συνάρτηση f στο διάστημα $[-1,5]$. (Μονάδες 06)

Λύση

α) Σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,2]$, $(2,5]$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Στο $x_0=2$ είναι $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(x^2-3)=1=f(2)$, $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(x-1)=1$. Επειδή $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=f(2)$, η f είναι συνεχής στο $x_0=2$, οπότε η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-3-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=4$ και

$\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x-1-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x-2}{x-2}=1$. Επειδή $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\neq\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=2$.

γ) Επειδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=2$, δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,5)$.
Η f είναι συνεχής στο $[-1,5]$.

Σταθερή συνάρτηση

Θέμα 4ο

23199.Έστω $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x>1$ να ισχύει $xf(x)f'(x)=\frac{1}{2}$ και $f(e)=1$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-\ln x,\ x>1$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f. (Μονάδες 9)

Έστω $f(x)=\sqrt{\ln x},\ x>1$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-e,\,0)$ και $B(e,\,1)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο B. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $\dfrac{1}{x+1}<f^2(x+1)-f^2(x)<\dfrac{1}{x}$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=2f(x)f'(x)-\frac{1}{x}$. Όμως για κάθε $x>1$ είναι $xf(x)f'(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f(x)f'(x)=\frac{1}{2x}$, άρα

$g'(x)=2\frac{1}{2x}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow g(x)=c,\ c\in\mathbb{R}.\ x>1$

Είναι $g(e)=f^2(e)-\ln e=1-1=0\Leftrightarrow c=0$, άρα για κάθε $x>1$ είναι $g(x)=0\Leftrightarrow f^2(x)-\ln x=0\Leftrightarrow$

$f^2(x)=\ln x \Leftrightarrow |f(x)|=\sqrt{\ln x}$.

Για κάθε x > 1 είναι $xf(x)f'(x)=\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)\neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $f(e)=1>0$, οπότε για κάθε x > 1 είναι $f(x)>0$, άρα $f(x)=\sqrt{\ln x}$.

β) Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB}=\frac{1-0}{e+e}=\frac{1}{2e}$.

Η ευθεία ΑΒ εφάπτεται της C_f στο Β αν και μόνο αν $f'(e)=\lambda_{AB}=\frac{1}{2e}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}(\ln x)'=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

Είναι $f'(e)=\frac{1}{2e\sqrt{\ln e}}=\frac{1}{2e}$, άρα η ευθεία ΑΒ εφάπτεται της C_f στο Β.

γ) Για κάθε είναι $\frac{1}{x+1}<f^2(x+1)-f^2(x)<\frac{1}{x}\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$.

Για τη συνάρτηση $\varphi(x)=\ln x,\ x>1$, ισχύει το θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα [x, x+1], οπότε υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi'(\xi)=\frac{\varphi(x+1)-\varphi(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow\frac{1}{\xi}=\ln(x+1)-\ln x$.

Είναι $x<\xi<x+1\Leftrightarrow\frac{1}{x}>\frac{1}{\xi}>\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$

Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

Θέμα 2ο

23197.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε δυο διαφορετικούς αριθμούς α, β ώστε $f(\alpha)=f(\beta)$. Κατόπιν να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 9)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση, με τη βοήθεια της παραγώγου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 8)

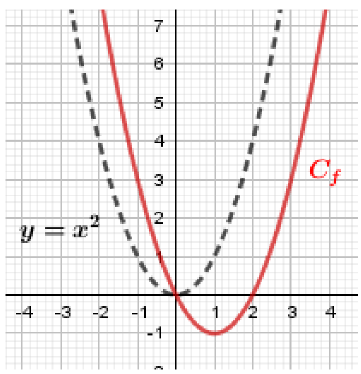
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση C_f της f. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Είναι $f(0)=0$ και $f(2)=0$ άρα $f(0)=f(2)$.

Επειδή $f(0)=f(2)$ η f δεν είναι 1-1 οπότε δεν αντιστρέφεται.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2x-2$. Για κάθε x < 1 είναι $f'(x)<0$ και για κάθε x > 1 είναι $f'(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=-1$.



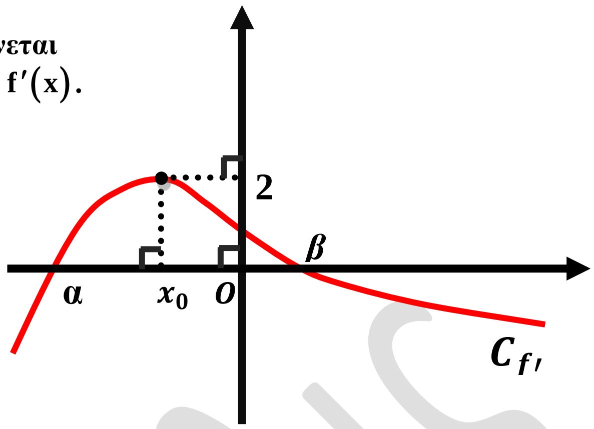
γ) Είναι $f(x)=x^2-2x+1-1=(x-1)^2-1$. Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y=x^2$ κατά 1 μονάδα δεξιά και 1 μονάδα προς τα κάτω.

Θέμα 4ο

23210.Θεωρούμε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.

Γνωρίζουμε ότι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$,
- **τα α, β είναι οι τετμημένες των μοναδικών δύο σημείων στα οποία τέμνει τον άξονα x΄x η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.**
- $f(\alpha)<0, f(\beta)>0$.
- **η γραφική παράσταση της $f'(x)$ παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση x_0.**



α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $f(x)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $f(x+1)-f(x)\le 2$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Για κάθε $x<\alpha$ ή $x>\beta$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στα $(-\infty,\alpha]$, $[\beta,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα αυτά. Για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ είναι $f'(x)>0$ και η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει τοπικό ελάχιστο για x = α το $f(\alpha)$ και τοπικό μέγιστο για x = β το $f(\beta)$.

β) Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,\alpha]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=[f(\alpha),+\infty)$. Επειδή $f(\alpha)<0, f(\beta)>0$, το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει μοναδικό, λόγω μονοτονίας, x_2 στο εσωτερικό του Δ_2 τέτοιο, ώστε $f(x_2)=0$.
Στο διάστημα $\Delta_3=[\beta,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_3)=(-\infty,f(\beta)]$. Επειδή $f(\beta)>0$, το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f(\Delta_3)$, οπότε υπάρχει μοναδικό, λόγω μονοτονίας, x_3 στο εσωτερικό του Δ_3 τέτοιο, ώστε $f(x_3)=0$.
Τελικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες.

γ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[x,x+1]$, $x\in\mathbb{R}$, οπότε υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x).$$

Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f ΄έχει μέγιστο το 2 για $x=x_0$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)\le 2$.
Επομένως και $f'(\xi)\le 2 \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)\le 2$

23311.Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με άθροισμα καθέτων πλευρών ίσο με 1. Αν η μία κάθετη πλευρά του έχει μήκος x , τότε:

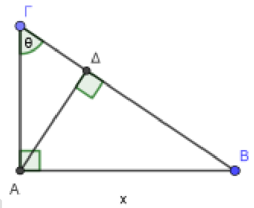
α) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει την υποτείνουσα του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή του ύψους υ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου είναι ίση με $\frac{\sqrt{2}}{4}$, όταν $x=\frac{1}{2}$. **(Μονάδες 07)**

δ) Αν θ η οξεία γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά x, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0)=\frac{1}{2}$, δεδομένου ότι η πλευρά x αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $0{,}1\,m/sec$. **(Μονάδες 05)**

Λύση



α) Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $A=90^\circ$ στο οποίο ΑΒ = x, ΑΓ = y με $x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x$.

Είναι $E(x)=(AB\Gamma)=\frac{1}{2}AB\cdot A\Gamma=\frac{1}{2}x(1-x)=\frac{1}{2}(x-x^2)$.

Είναι $x>0,\ y>0 \Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$, άρα $x\in(0,1)$.

Η Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $E'(x)=\frac{1}{2}(1-2x)$.

$E'(x)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-2x)\ge 0 \Leftrightarrow 1-2x\ge 0 \Leftrightarrow 1\ge 2x \Leftrightarrow x\le\frac{1}{2}$.

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι $E'(x)>0$ και για κάθε $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ είναι $E'(x)<0$. Επειδή η Ε είναι συνεχής στο $(0,1)$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2},1\right)$.

Η Ε έχει μέγιστο για $x=\frac{1}{2}$ το $E\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$.

β) Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2=x^2+(1-x)^2=x^2+1-2x+x^2 \Leftrightarrow$
$B\Gamma^2=2x^2-2x+1 \Leftrightarrow B\Gamma=\sqrt{2x^2-2x+1}$. Έστω $B\Gamma(x)=\sqrt{2x^2-2x+1},\ x\in(0,1)$.

Η συνάρτηση ΒΓ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$B\Gamma'(x)=\frac{(2x^2-2x+1)'}{2\sqrt{2x^2-2x+1}}=\frac{4x-2}{2\sqrt{2x^2-2x+1}}=\frac{\cancel{2}(2x-1)}{\cancel{2}\sqrt{2x^2-2x+1}}.$$

Είναι $B\Gamma'(x)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\cancel{2}(2x-1)}{\cancel{2}\sqrt{2x^2-2x+1}}\ge 0 \Leftrightarrow 2x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge\frac{1}{2}$.

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι $B\Gamma'(x)<0$ και για κάθε $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ είναι $B\Gamma'(x)>0$. Επειδή η ΒΓ είναι συνεχής στο $(0,1)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2},1\right)$.

Η υποτείνουσα ΒΓ γίνεται ελάχιστη για $x=\frac{1}{2}$ με τιμή $B\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2\cdot\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{2}+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

γ) Έστω ΑΔ= υ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου. Τότε
$E=\frac{1}{2}B\Gamma\cdot\upsilon \Leftrightarrow \upsilon=\frac{2E}{B\Gamma}$.

Επειδή η Ε έχει μέγιστο το $E\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$ ισχύει ότι $2E(x)\le\frac{1}{4}$ (1) και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\frac{1}{2}$.

Επειδή η ΒΓ έχει ελάχιστο το $B\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ισχύει ότι $B\Gamma(x)\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{B\Gamma(x)}\le\frac{2}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\frac{1}{B\Gamma(x)}\le\sqrt{2}$ (2)

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\frac{1}{2}$. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (1), (2) προκύπτει ότι

$\frac{2E(x)}{B\Gamma(x)}\le\frac{\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow\upsilon\le\frac{\sqrt{2}}{4}$. Οπότε η μέγιστη τιμή του ύψους υ είναι $\frac{\sqrt{2}}{4}$ για $x=\frac{1}{2}$.

δ) Είναι $\Gamma=\theta$ και $\varepsilon\varphi\theta=\frac{A\Gamma}{AB}$, άρα $\varepsilon\varphi\theta(t)=\frac{x(t)}{1-x(t)}$.

Είναι $\left(\varepsilon\varphi\theta(t)\right)'=\left(\frac{x(t)}{1-x(t)}\right)'\Leftrightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=\frac{x'(t)\left(1-x(t)\right)-x(t)\left(-x'(t)\right)}{\left(1-x(t)\right)^2}$ και τη χρονική στιγμή

$t=t_0$ είναι $\theta'(t_0)=\frac{x'(t_0)\left(1-x(t_0)\right)-x(t_0)\left(-x'(t_0)\right)}{\left(1-x(t_0)\right)^2}\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)\Leftrightarrow$

$$\theta'(t_0)=\frac{0{,}1\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}(-0{,}1)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{A\Gamma(t_0)}{B\Gamma(t_0)}\right)^2=\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{A\Gamma(t_0)}{B\Gamma(t_0)}\right)^2=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{1}{5}\text{ rad/sec}$$

23376.Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $\mathbf{f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\ x\in\mathbb{R}}$ **και**
- $\mathbf{g(x)=\ln x,\ x\in(0,+\infty)}$.

Αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=g\circ f$. **(Μονάδες 07)**

β) Να αποδείξετε ότι:

i. η συνάρτηση h είναι περιττή. **(Μονάδες 04)**

ii. η συνάρτηση h είναι "1-1". **(Μονάδες 06)**

γ) Να λυθεί η εξίσωση $h(x-1)+h\left(\ln\frac{1}{x}\right)=0,\ x>0$. **(Μονάδες 08)**

Λύση

α) Επειδή η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $f(x)>0,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $A_h=\{x\in A_f\ /\ f(x)\in A_g\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ f(x)>0\}=\mathbb{R}$ και $h(x)=g(f(x))=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

β) i. Για κάθε $x\in A_h=\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$ και $h(-x)=-h(x)\Leftrightarrow\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\Leftrightarrow$

$\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0\Leftrightarrow\ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]=0\Leftrightarrow$

$\ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2\right]=0\Leftrightarrow\ln\left(x^2+1-x^2\right)=0\Leftrightarrow\ln 1=0$ ισχύει. Άρα η h είναι περιττή.

ii. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)'}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}-1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{-\cancel{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}}{\sqrt{x^2+1}\cancel{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $h'(x)<0$, άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1.

$$h(x-1)+h\left(\ln\frac{1}{x}\right)=0\Leftrightarrow h(x-1)=-h\left(\ln\frac{1}{x}\right)\overset{h\ \text{περιττή}}{\Leftrightarrow} h(x-1)=h\left(-\ln\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow h(x-1)=h(-\ln 1+\ln x)\Leftrightarrow$$

$h(x-1)=h(\ln x)\overset{h\ 1-1}{\Leftrightarrow} x-1=\ln x\Leftrightarrow x=1$ αφού για κάθε x > 0 είναι $\ln x\le x-1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 1.

24579.Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=2\ln x-x$.

α) i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της. (Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 07)

iii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\kappa,\ \kappa\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 07)

Λύση

α) i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}$.

Για κάθε x > 0 είναι $f'(x)\ge 0\Leftrightarrow\frac{2-x}{x}\ge 0\Leftrightarrow 2-x\ge 0\Leftrightarrow x\le 2$.

Για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε x > 2 είναι $f'(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$.

ii. Είναι $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2\ln x-x)=-\infty$, $f(2)=2\ln 2-2$ και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2\ln x-x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(2\frac{\ln x}{x}-1\right)\right]=-\infty \text{ γιατί } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

Στο διάστημα $\Delta_1=(0,2]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=(-\infty,2\ln 2-2]$.Στο διάστημα $\Delta_1=[2,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2)=(-\infty,2\ln 2-2]$.

Η f έχει σύνολο τιμών το $f((0,+\infty))=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=(-\infty,2\ln 2-2]$

iii. Από το σύνολο τιμών της f, προκύπτει ότι παρουσιάζει μέγιστο το 2ln2-2 για x = 2.

β) Αν κ < 2ln2-2 τότε υπάρχει μοναδικό $x_1\in(0,2)$ και μοναδικό $x_2\in(2,+\infty)$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=f(x_2)=\kappa$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στη περίπτωση αυτή.

Αν κ = 2ln2-2 τότε επειδή για κάθε $x\in(0,2)\cup(2,+\infty)$ είναι $f(x)<2\ln 2-2$, η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει ακριβώς μία λύση τη x = 2.

Τέλος αν κ > 2ln2-2, τότε το κ δεν περιέχεται στο σύνολο τιμών της f και η εξίσωση $f(x)=\kappa$ είναι αδύνατη.

24587.Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=2\ln x-x$ και η ευθεία $\varepsilon: y=x$. Γνωρίζουμε ότι η απόσταση ενός σημείου $M(x_0,y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία ε, είναι $d(M,\varepsilon)=\sqrt{2}\,|x_0-\ln x_0|$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου $M(x_0,y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία $\varepsilon: y=x$, είναι $d(M,\varepsilon)=\sqrt{2}\,(x_0-\ln x_0)$. (Μονάδες 05)

β) i. Να βρείτε το σημείο της C_f, το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε. (Μονάδες 12)

ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση. (Μονάδες 03)

γ) Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y=x$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης. (Μονάδες 05)

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι για κάθε x > 0 είναι $\ln x<x \Leftrightarrow \ln x-x<0$, άρα $d(M,\varepsilon)=\sqrt{2}\,|x_0-\ln x_0|=\sqrt{2}\,(\ln x_0-x_0)$.

β) i. Έστω $d(x)=\sqrt{2}(x-\ln x)$, $x>0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $d'(x)=\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\sqrt{2}\cdot\frac{x-1}{x}$.

Είναι $d'(x)\ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot\frac{x-1}{x}\ge 0 \Leftrightarrow x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $d'(x)<0$ και για κάθε x > 1 είναι $d'(x)>0$, επειδή η d είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη για x = 1. Τότε $M(1,-1)$.

ii. Η ελάχιστη απόσταση είναι $d(1)=\sqrt{2}(1-\ln 1)=\sqrt{2}$.

γ) Αρκεί να βρούμε $x_1>0$ για το οποίο ισχύει ότι $f'(x_1)=\lambda_\varepsilon=1 \Leftrightarrow \frac{2}{x_1}-1=1 \Leftrightarrow \frac{2}{x_1}=2 \Leftrightarrow x_1=1$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση: $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y+1=x-1 \Leftrightarrow y=x-2$.

Κυρτότητα – Σημεία καμπής

Θέμα 4ο

23312. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $[-2,2]$ τέτοια ώστε:

- f συνεχής στο $[-2,2]$,

- δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ και

- $f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0$, για κάθε $x\in[-2,2]$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει σημεία καμπής. (Μονάδες 08)

β) Αν $f(0)=3$,

i. Να αποδείξετε ότι $(f(x)-1)^2=4-x^2$, για κάθε $x\in[-2,2]$ και κατόπιν ότι $f(x)=1+\sqrt{4-x^2}$, $x\in[-2,2]$. (Μονάδες 09)

ii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x)=$ συνx. (Μονάδες 08)

Λύση

α) Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής το $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, $x_0 \in (-2,2)$, τότε $f''\left(x_0\right)=0$.

Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$, η συνάρτηση $f^2(x)-2f(x)+x^2-3$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε:

$$\left(f^2(x)-2f(x)+x^2-3\right)'=0 \Leftrightarrow 2f(x)f'(x)-2f'(x)+2x=0 \Rightarrow \left(2f(x)f'(x)-2f'(x)+2x\right)'=0 \Leftrightarrow$$

$2f'(x)f'(x)+2f(x)f''(x)-2f''(x)+2=0$ και για $x=x_0$ είναι

$$2\left(f'\left(x_0\right)\right)^2+2f\left(x_0\right)\cancel{f''\left(x_0\right)}^{0}-2\cancel{f''\left(x_0\right)}^{0}+2=0 \Leftrightarrow 2\left(f'\left(x_0\right)\right)^2=-2 \text{ αδύνατη.}$$

Επομένως η f δεν έχει σημείο καμπής .

β) i. $f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0 \Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+1=4-x^2 \Leftrightarrow \left(f(x)-1\right)^2=4-x^2 \Leftrightarrow$

$|f(x)-1|=\sqrt{4-x^2}$ (1). Έστω $h(x)=f(x)-1$, $x\in[-2,2]$.

Είναι $h(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}=0 \Leftrightarrow 4-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Για κάθε $x\in(-2,2)$ είναι $h(x)\neq 0$ και επειδή η h είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Είναι $h(0)=f(0)-1=2>0$, άρα $h(x)>0$ για κάθε $x\in(-2,2)$, οπότε η (1) γίνεται:

$f(x)-1=\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow f(x)=1+\sqrt{4-x^2}$, $x\in(-2,2)$.

Για $x=2$ και $x=-2$ είναι $|f(2)-1|=\sqrt{4-4} \Leftrightarrow f(2)-1=0 \Leftrightarrow f(2)=1$ και όμοια $f(-2)=1$.

Άρα $f(x)=\begin{cases} 1+\sqrt{4-x^2}, & x\in(-2,2) \\ 1, & x=2 \text{ ή } x=-2 \end{cases} = 1+\sqrt{4-x^2},\ x\in[-2,2]$.

ii. Είναι $f'(x)=-\dfrac{2x}{2\sqrt{4-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Για κάθε $x\in(-2,0)$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $f'(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής στο $[-2,2]$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$.

Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(-2)=1$ και το $f(2)=1$ και τοπικό μέγιστο το $f(0)=3$.

Για κάθε $x\in[-2,0]$ είναι $f(-2)\le f(x)\le f(0) \Leftrightarrow 1\le f(x)\le 3$ και για κάθε $x\in[0,2]$ είναι $f(2)\le f(x)\le f(0) \Leftrightarrow 1\le f(x)\le 3$, άρα για κάθε $x\in[-2,2]$ είναι $1\le f(x)\le 3$, επομένως η f έχει ελάχιστο το 1 για $x=2$ και $x=-2$ και μέγιστο το 3 για x = 0.

Επειδή για κάθε $x\in[-2,2]$ είναι $1\le f(x)\le 3$ και $-1\le \text{συν}x\le 1$, η εξίσωση $f(x)=\text{συν}x$ έχει λύση μόνο όταν $f(x)=\text{συν}x=1$, το οποίο είναι αδύνατο αφού η εξίσωση $f(x)=1$ έχει λύσεις τις $x=2$ ή $x=-2$ που δεν επαληθεύουν την $\text{συν}x=1$.

23531.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x-3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$. **(Μονάδες 6)**

β) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο $x_0\in(0,1)$ με $f(x_0)<0$. **(Μονάδες 10)**

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\left(f(x)\right)^{2023}}{f(x)-f(x_0)}$. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$ και $f''(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}$.

Για κάθε x > 0 είναι $f''(x)>0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$ και $f'(1)=e-1$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Επειδή η f΄ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'((0,1))=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x),\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)\right)=(-\infty,e-1)$. Επειδή το μηδέν περιέχεται στο $f'((0,1))$, υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Για κάθε $x<x_0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x_0)=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,x_0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x>x_0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_0)=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=x_0$ το $f(x_0)$. Είναι $x_0<1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_0)<f(1)=e-3<0$.

γ) Επειδή η f έχει ελάχιστο στο x_0 είναι $f(x)\ge f(x_0)$ για κάθε $x>0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=x_0$, οπότε για κάθε x κοντά στο x_0 είναι $f(x)>f(x_0)\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)>0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(f(x))^{2023}}{f(x)-f(x_0)}=\lim\limits_{x\to x_0}\left[(f(x))^{2023}\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}\right]=-\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{2023}=(f(x_0))^{2023}<0$

και $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$ και $f(x)-f(x_0)>0$ κοντά στο x_0.

24760.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x-\lambda x,\ x>0$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει $e-\lambda=e^e-1-\lambda e$, να αποδείξετε ότι :

α) η f είναι κυρτή. **(Μονάδες 6)**

β) υπάρχει ακριβώς ένα $x_o\in(1,e)$ με $f'(x_0)=0$. **(Μονάδες 6)**

γ) για την f' ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1,e]$. **(Μονάδες 6)**

δ) η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο x_o που είναι το $e^{x_o}(1-x_o)+1-\ln x_o$. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}-\lambda$ και $f''(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}$.

Για κάθε x > 0 είναι $f''(x)>0$, άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

β) $e-\lambda=e^e-1-\lambda e\Leftrightarrow f(1)=f(e)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,e]$, παραγωγίσιμη στο $(1,e)$ και $f(1)=f(e)$, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $x_o\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

γ) Είναι $e-\lambda=e^e-1-\lambda e\Leftrightarrow \lambda e-\lambda=e^e-e-1\Leftrightarrow \lambda(e-1)=e^e-e-1\Leftrightarrow \lambda=\dfrac{e^e-e-1}{e-1}=\dfrac{e^e}{e-1}-1$

Επειδή η f είναι κυρτή η f ΄είναι γνησίως αύξουσα άρα $1<x_0<e\Leftrightarrow f'(1)<f'(x_0)<f'(e)\Leftrightarrow f'(1)<0<f'(e)$, οπότε $f'(1)f'(e)<0$. Επειδή η f ΄είναι συνεχής στο $[1,e]$, για την f' ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1,e]$.

δ) Για κάθε $0<x<x_0 \Rightarrow f'(x)<f'(x_0)=0$ και για κάθε $x>x_0$ είναι $f'(x)>f'(x_0)=0$, επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-\lambda x_0$. Όμως $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{x_0}-\frac{1}{x_0}-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=e^{x_0}-\frac{1}{x_0}$, οπότε

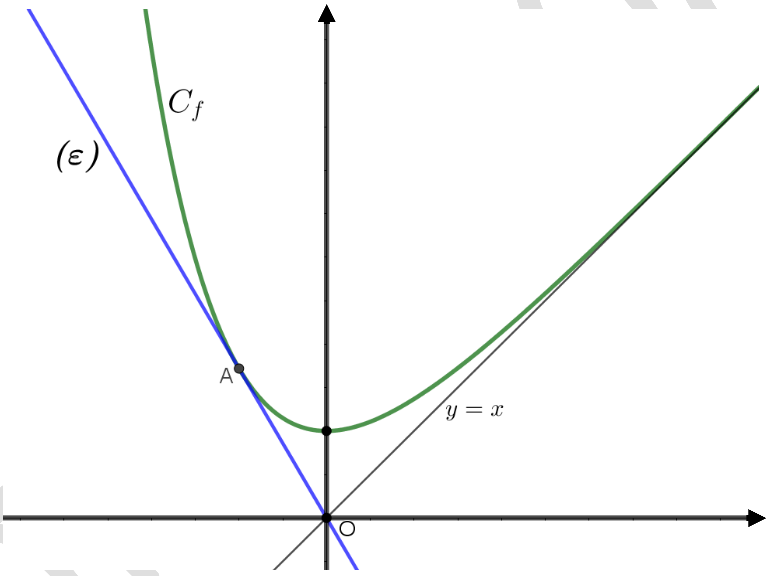
$$f(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-x_0\left(e^{x_0}-\frac{1}{x_0}\right)=e^{x_0}-\ln x_0-x_0e^{x_0}+1=e^{x_0}(1-x_0)+1-\ln x_0$$

Κανόνες De L' Hospital - Ασύμπτωτες

Θέμα 2ο

23530.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης $f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:

- **στο σημείο $A(-1,f(-1))$ της γραφικής παράστασης της f έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία (ε), η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.**
- **η ευθεία y = x είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$.**



α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(-1)=e-1$, να αποδείξετε ότι το $f'(-1)=1-e$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε). **(Μονάδες 9)**

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$. **(Μονάδες 8)**

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf(x)-x^2}{f(x)}$. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Η εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-e+1=(1-e)(x-1) \Leftrightarrow y=(1-e)x$.

β) Επειδή η ευθεία $y=x=1\cdot x+0$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-x^2}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{xf(x)}{x}-\dfrac{x^2}{x}}{\dfrac{f(x)}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{\dfrac{f(x)}{x}}=\dfrac{0}{1}=0$

24755.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$. **(Μονάδες 10)**

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$. **(Μονάδες 10)**

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0,f(0))$. **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι και στο $x_0=0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=\alpha\Leftrightarrow1-1=\alpha\Leftrightarrow\alpha=0$

β) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{\eta\mu x}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x-\eta\mu x}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\eta\mu x}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1}=1-1=0$

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0,f(0))$ έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=0$, δηλαδή είναι ο άξονας x΄x.

Θέμα 4ο

24759.Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x)\geq x^2-x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) i. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. **(Μονάδες 4)**

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες. **(Μονάδες 6)**

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq\dfrac{3}{4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 5)**

β) Αν επιπλέον $f(1)=1$ και $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$ να αποδείξετε ότι:

i. $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$. **(Μονάδες 5)** **ii. η f δεν είναι κοίλη.** **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) i. Για κάθε x > 0 είναι $\dfrac{f(x)}{x}\geq\dfrac{x^2}{x}-1+\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}\geq x-1+\dfrac{1}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

ii. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Για x < 0 είναι $\frac{f(x)}{x}\le\frac{x^2}{x}-1+\frac{1}{x}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}\le x-1+\frac{1}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-1+\frac{1}{x}\right)=-\infty$ οπότε και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$, άρα η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$, οπότε και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Τέλος επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Άρα η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες.

iii. Αρκεί για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να είναι $x^2-x+1\ge\frac{3}{4}\Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{4}\ge0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\ge0$ ισχύει.

Άρα $f(x)\ge x^2-x+1\ge\frac{3}{4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) i. Είναι $f(x)\ge\frac{3}{4}=f\left(\frac{1}{2}\right)$, άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=\frac{1}{2}$ το οποίο είναι στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

ii. Αν η f ήταν κοίλη τότε η f ΄θα ήταν γνησίως φθίνουσα. Για κάθε $x>\frac{1}{2}\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ θα είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι $\frac{1}{2}<1\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f\left(\frac{1}{2}\right)>f(1)\Leftrightarrow\frac{3}{4}>1$ άτοπο. Άρα η f δεν είναι κοίλη.

Ασκησόπολις

Αρχική συνάρτηση

Θέμα 4ο

24769.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$, $x>-1$ και έστω F αρχική της f με $F(1)=\ln 2$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>-1$ ισχύει $f'(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$ και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. **(Μονάδες 8)**

β) Να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$. **(Μονάδες 6)**

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της F στο $x_0=1$. **(Μονάδες 6)**

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\frac{2F(x)-1}{x}\geq \ln 4-1$. **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{(x+1)'}{x+1}-\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x+1-1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$$

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(-1,0)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-1,0]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

β) Για κάθε x > 0 είναι $F'(x)=f(x)$ και $F''(x)=f'(x)>0$, οπότε η F είναι κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$.

γ) i. ε: $y-F(1)=F'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-\ln 2=f(1)(x-1)\Leftrightarrow y-\ln 2=\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)(x-1)\Leftrightarrow$

$$y=\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)x-\ln 2+\frac{1}{2}+\ln 2\Leftrightarrow y=\left(\frac{2\ln 2-1}{2}\right)x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=\left(\frac{\ln 4-1}{2}\right)x+\frac{1}{2}.$$

ii. Επειδή η F είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, οπότε για κάθε $x>0$ ισχύει

$$F(x)\geq\left(\frac{\ln 4-1}{2}\right)x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2F(x)\geq(\ln 4-1)x+1\Leftrightarrow 2F(x)-1\geq(\ln 4-1)x\Leftrightarrow\frac{2F(x)-1}{x}\geq\ln 4-1.$$

Υπολογιστικά ολοκληρώματα

Θέμα 4ο

23957.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\ln^2 x}$, $x>0$.

α) Να αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=2\frac{\ln x}{x}f(x)$. **(Μονάδες 8)**

β) Να αποδείξτε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1. **(Μονάδες 7)**

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^e\frac{2\ln x\cdot f(x)+xe^x}{x\left(f(x)+e^x\right)}dx$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $g(x)=e^x$, $h(x)=x^2$ και $\varphi(x)=\ln x$ με $f'(x)=e^{\ln^2 x}\left(\ln^2 x\right)'=f(x)\cdot 2\ln x(\ln x)'=2\frac{\ln x}{x}f(x)$.

β) Είναι $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 2\frac{\ln x}{x}f(x)\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$ και για κάθε x > 1 είναι $f'(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=1$.

γ) $I=\int_1^e \frac{2\ln x\cdot f(x)+xe^x}{x\left(f(x)+e^x\right)}dx=\int_1^e \frac{\frac{2\ln x\cdot f(x)}{x}+\frac{xe^x}{x}}{\frac{x\left(f(x)+e^x\right)}{x}}dx=\int_1^e \frac{f'(x)+e^x}{f(x)+e^x}dx=\int_1^e \frac{\left(f(x)+e^x\right)'}{f(x)+e^x}dx=$

$\left[\ln\left|f(x)+e^x\right|\right]_1^e=\ln\left(f(e)+e^e\right)-\ln\left(f(1)+e\right)=\ln\frac{e+e^x}{1+e}$.

24770.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)+x-1,\ x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη. (Μονάδες 8)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_o=\ln 2$. (Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln\left(e^x-1\right)\leq 2x-\ln 4$. (Μονάδες 4)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2-e^{-x}}{e^{-x}-1}dx$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}+1$.

Για κάθε x > 0 είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Η f ΄ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x)=\frac{e^x\left(e^x-1\right)-e^x\cdot e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=-\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$.

Για κάθε x > 0 είναι $f''(x)<0$ άρα η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$.

β) i. Είναι $f(\ln 2)=\ln\left(e^{\ln 2}-1\right)+\ln 2-1=\ln(2-1)+\ln 2-1=\ln 1+\ln 2-1=\ln 2-1$ και

$f'(\ln 2)=\frac{e^{\ln 2}}{e^{\ln 2}-1}+1=\frac{2}{2-1}+1=3$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_o=\ln 2$ έχει εξίσωση ε:

$y-f(\ln 2)=f'(\ln 2)(x-\ln 2)\Leftrightarrow y-\ln 2+1=3x-3\ln 2\Leftrightarrow y=3x-2\ln 2-1$

ii. Επειδή η f είναι κοίλη βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε x > 0 είναι $f(x)\leq 3x-2\ln 2-1\Leftrightarrow \ln\left(e^x-1\right)+x-1\leq 3x-2\ln 2-1\Leftrightarrow \ln\left(e^x-1\right)\leq 2x-\ln 4$.

γ) $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2-e^{-x}}{e^{-x}-1}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2-\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}-1}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\frac{2e^x-1}{\cancel{e^x}}}{\frac{1-e^x}{\cancel{e^x}}}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2e^x-1}{1-e^x}dx=-\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2e^x-1}{e^x-1}dx\Leftrightarrow$

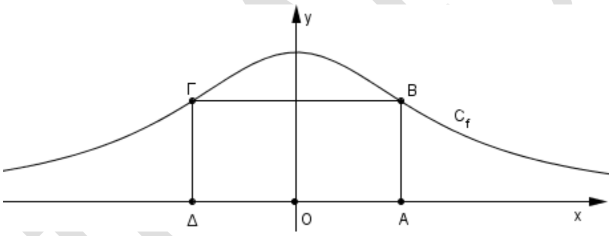
$I=-\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x-1+e^x}{e^x-1}dx=-\int_{\ln 2}^{\ln 3}1+\frac{e^x}{e^x-1}dx=-\int_{\ln 2}^{\ln 3}f'(x)dx=-\left[f(x)\right]_{\ln 2}^{\ln 3}=-f(\ln 3)+f(\ln 2)\Leftrightarrow$

$I=-\ln\left(e^{\ln 3}-1\right)-\ln 3+1+\ln 2-1=\ln 2-\ln 3+\ln 2=-\ln 3$

24771.Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0)=1$ και $\left(x^2+1\right)f'(x)+\frac{2x}{x^2+1}=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης.



β) Να αιτιολογήσετε γιατί η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ, Δ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με τη βοήθεια της τετμημένης α, $\alpha>0$ του σημείου $A(\alpha, 0)$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο $E(\alpha)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$, $\alpha>0$.Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του α το εμβαδόν γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 8)

δ) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1)=\ln 2$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(x)dx=\ln\sqrt{2}$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\left(x^2+1\right)f'(x)+\frac{2x}{x^2+1}=0\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)f'(x)=-\frac{2x}{x^2+1}\Leftrightarrow$

$f'(x)=-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}=-\frac{\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{x^2+1}+c,\ c\in\mathbb{R}$. Είναι $f(0)=1\Leftrightarrow 1+c=1\Leftrightarrow c=0$, άρα $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $-x\in\mathbb{R}$ και $f(-x)=\frac{1}{(-x)^2+1}=\frac{1}{x^2+1}=f(x)$, άρα η f είναι άρτια, οπότε η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y.

Είναι $B(\alpha,f(\alpha))$ και λόγω συμμετρίας $\Gamma(-\alpha,f(\alpha))$, $\Delta(-\alpha,0)$.

γ) Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει εμβαδό $E(\alpha)=(A\Delta)(AB)=2\alpha f(\alpha)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$, $\alpha>0$.

Η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$E'(\alpha)=\frac{2\left(\alpha^2+1\right)-2\alpha\cdot 2\alpha}{\left(\alpha^2+1\right)^2}=\frac{2-2\alpha^2}{\left(\alpha^2+1\right)^2}=\frac{2(1-\alpha)(1+\alpha)}{\left(\alpha^2+1\right)^2}$.

Είναι $E'(\alpha)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(1-\alpha)(1+\alpha)}{(\alpha^2+1)^2}\geq 0 \Leftrightarrow 1-\alpha\geq 0 \Leftrightarrow \alpha\leq 1$.

Για κάθε $\alpha\in(0,1)$ είναι $E'(\alpha)>0$ και επειδή η E είναι συνεχής στο $(0,1]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $\alpha\in(1,+\infty)$ είναι $E'(\alpha)<0$ και επειδή η E είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η E παρουσιάζει μέγιστο για α = 1.

δ) $\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1 x'\cdot F(x)dx=\left[xF(x)\right]_0^1-\int_0^1 xF'(x)dx=F(1)-\int_0^1 xf(x)dx \Leftrightarrow$

$\int_0^1 F(x)dx=\ln 2-\int_0^1\dfrac{x}{x^2+1}dx=\ln 2-\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx \Leftrightarrow$

$\int_0^1 F(x)dx=\ln 2-\dfrac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1=\ln 2-\dfrac{1}{2}\ln 2=\dfrac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}$

Ιδιότητες ολοκληρωμάτων

Θέμα 4ο

23219.Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(1)=f'(1)=2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1,f(1))$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_0^1 f(x)dx>1$. (Μονάδες 6) **ii. $\int_0^1 xf'(x)dx<1$. (Μονάδες 6)**

Λύση

α) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1,f(1))$ έχει εξίσωση

ε: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-2=2x-2\Leftrightarrow y=2x$.

Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\geq 2x$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\geq 2x$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$, άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

γ) i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\geq 2x$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 1, άρα

$\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1 2xdx=\left[x^2\right]_0^1=1$.

ii. $\int_0^1 xf'(x)dx<1\Leftrightarrow\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 f(x)dx<1\Leftrightarrow f(1)-\int_0^1 f(x)dx<1\Leftrightarrow -\int_0^1 f(x)dx<1-2\Leftrightarrow$

$\int_0^1 f(x)dx>1$ ισχύει.

24758.Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, και η συνάρτηση $g(x)=(x^2-1)f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ και για $x=-1$ και στη συνέχεια ότι $f(1)=f(-1)=0$. **(Μονάδες 6)**

β) $f'(1)\ge 0$ και $f'(-1)\le 0$. **(Μονάδες 8)**

γ) η f δεν είναι κοίλη. **(Μονάδες 5)**

δ) $\int_{-1}^{1}(x^3-3x)f'(x)dx\le 0$. **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι $g(1)=g(-1)=0$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)\ge g(1)$ και $g(x)\ge g(-1)$, άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ και για $x=-1$.

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=2xf(x)+(x^2-1)f'(x)$ και τα $x=1$ και $x=-1$ είναι εσωτερικά του πεδίου ορισμού της, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $g'(1)=0\Leftrightarrow 2f(1)=0\Leftrightarrow f(1)=0$ και $g'(-1)=0\Leftrightarrow 2f(-1)=0\Leftrightarrow f(-1)=0$.

β) Είναι $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$. Είναι $g(x)\ge 0\Leftrightarrow (x^2-1)f(x)\ge 0$ (1), οπότε:

Αν $x>1\Leftrightarrow x-1>0$ τότε από την (1) προκύπτει $f(x)>0$ οπότε $\dfrac{f(x)}{x-1}>0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)}{x-1}\ge 0\Rightarrow f'(1)\ge 0$ Αν $x<-1\Leftrightarrow x+1<0$ τότε από την (1) προκύπτει ότι $f(x)>0$ οπότε $\dfrac{f(x)}{x+1}<0\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)}{x+1}\le 0\Rightarrow f'(-1)\le 0$.

γ) Έστω ότι η f είναι κοίλη τότε η f ΄θα είναι γνησίως φθίνουσα. Τότε $-1<1\Leftrightarrow f'(-1)>f'(1)$ που είναι άτοπο αφού $f'(-1)\le 0\le f'(1)$. Άρα η f δεν είναι κοίλη.

δ) $\int_{-1}^{1}(x^3-3x)f'(x)dx=\left[(x^3-3x)f'(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(3x^2-3)f(x)dx=0-0-3\int_{-1}^{1}g(x)dx$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)\ge 0$, άρα $\int_{-1}^{1}g(x)dx\ge 0\Leftrightarrow -3\int_{-1}^{1}g(x)dx\le 0\Leftrightarrow \int_{-1}^{1}(x^3-3x)f'(x)dx\le 0$

Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

Θέμα 4ο

23218.Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=x^3+3x^2-\lambda x+1$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $P(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής K. **(Μονάδες 6)**

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους. **(Μονάδες 6)**

γ) Έστω ότι $K(-1,\lambda+3)$ και ότι η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις x_1,x_2, με $x_1<-1<x_2$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_P στο σημείο K και κατόπιν να αιτιολογήσετε ότι βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο. **(Μονάδες 5)**

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_1 που περικλείεται μεταξύ των (ε) , C_P και των ευθειών $x=x_1, x=-1$ είναι ίσο με το εμβαδόν E_2 που περικλείεται μεταξύ των (ε) , C_P και των ευθειών $x=x_2, x=-1$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Η P είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $P'(x)=3x^2+6x-\lambda$.
Η P ΄ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $P''(x)=6x+6$.
Είναι $P''(x)\ge 0 \Leftrightarrow 6x+6\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -1$.
Για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ είναι $P''(x)<0$ και επειδή η P είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]$ είναι κοίλη στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ είναι $P''(x)>0$ και επειδή η P είναι συνεχής στο $[-1,+\infty)$ είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Η P έχει σημείο καμπής το $K(-1,P(-1))$ ή $(-1,3+\lambda)$.

β) Η P' είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta=36+12\lambda$.
Αν $\Delta<0 \Leftrightarrow 36+12\lambda<0 \Leftrightarrow 12\lambda<-36 \Leftrightarrow \lambda<-3$ τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $P'(x)>0$, οπότε η P είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.
Αν $\Delta=0 \Leftrightarrow 36+12\lambda=0 \Leftrightarrow 12\lambda=-36 \Leftrightarrow \lambda=-3$ τότε $P'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2>0$ για κάθε $x\neq -1$ και επειδή η P είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.
Αν $\Delta>0 \Leftrightarrow 36+12\lambda>0 \Leftrightarrow 12\lambda>-36 \Leftrightarrow \lambda>-3$ τότε η P ΄ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1<x_2$ και αφού α = 3>0 το πρόσημο της P ΄και η μονοτονία της P φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
P ΄		+	0	–	0	+	
P		↗		↘		↗	

Άρα για λ > - 3 η P έχει τοπικό μέγιστο στο $x_1=\dfrac{-6-\sqrt{12\lambda+36}}{6}$ και τοπικό ελάχιστο στο

$$x_1=\frac{-6+\sqrt{12\lambda+36}}{6}.$$

γ) i. Αφού η P παρουσιάζει τοπικά ακρότατα είναι λ >–3 . Η εφαπτομένη της C_P στο K έχει εξίσωση
ε: $y-P(-1)=P'(-1)(x+1)$ $y-(\lambda+3)=(-3-\lambda)(x+1) \Leftrightarrow y=(-3-\lambda)x$
Επειδή λ > - 3 είναι $(-3-\lambda)<0$ και επειδή διέρχεται από την αρχή O των αξόνων βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

ii. Επειδή η P είναι κοίλη στο $(-\infty,-1]$ βρίσκεται κάτω από την ε στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x\le -1$ είναι $P(x)\le(-3-\lambda)x$.
Επειδή η P είναι κυρτή στο $[-1,+\infty)$, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους άρα για κάθε $x\ge -1$ είναι $P(x)\ge(-3-\lambda)x$.

$$E_1=\int_{x_1}^{-1}\left((-3-\lambda)x-P(x)\right)dx=\int_{x_1}^{-1}\left((-3-\lambda)x-\left(x^3+3x^2-\lambda x+1\right)\right)dx=$$

$$\int_{x_1}^{-1}\left((-3-\lambda)x-x^3-3x^2+\lambda x-1\right)dx=\int_{x_1}^{-1}\left(-x^3-3x^2-3x-1\right)dx=-\int_{x_1}^{-1}(x+1)^3dx=$$

$$-\left[\frac{(x+1)^4}{4}\right]_{x_1}^{-1}=\frac{(x_1+1)^4}{4}$$

$$E_2=\int_{-1}^{x_2}\left(P(x)-(-3-\lambda)x\right)dx=\int_{-1}^{x_2}\left(\left(x^3+3x^2-\lambda x+1\right)-(-3-\lambda)x\right)dx=$$

$$\int_{-1}^{x_2}\left(x^3+3x^2+3x+1\right)dx=\int_{-1}^{x_2}(x+1)^3dx==\frac{(x_2+1)^4}{4}$$

$E_1 = E_2 \Leftrightarrow \frac{(x_1+1)^4}{4} = \frac{(x_2+1)^4}{4} \Leftrightarrow (x_1+1)^4 = (x_2+1)^4 \Leftrightarrow (x_1+1 = x_2+1 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ αδύνατο})$ ή $(x_1+1 = -x_2-1 \Leftrightarrow x_1+x_2 = -2 \ (1))$

Επειδή τα x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $P'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2+6x-\lambda = 0$, από τους τύπους Vieta είναι $x_1 + x_2 = -\frac{6}{3} = -2$, άρα η (1) είναι αληθής.

24275.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x+1+\frac{1}{e^x}, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία $y=-x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$. (Μονάδες 07)

β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ, η οποία είναι μεγαλύτερη του 1. (Μονάδες 09)

γ) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=\rho$ ισούται με $E(\Omega) = -\frac{(\rho-1)^2}{2} - (\rho-1) + e^{-1}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 09)

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = -x+1+\frac{1}{e^x} \Leftrightarrow f(x)+x-1 = e^{-x}$, άρα $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x-1) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, οπότε η ευθεία $y=-x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -1-e^{-x}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) < 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f(1) = -1+1+\frac{1}{e} = \frac{1}{e} > 0$, $f(2) = -2+1+\frac{1}{e^2} = -1+\frac{1}{e^2} < 0$, δηλαδή $f(1)f(2) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο [1,2], σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\rho \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = 0$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα το ρ είναι μοναδικό και επειδή επιπλέον $\rho \in (1,2)$ είναι $\rho > 1$.

γ) Για κάθε $x \in (1,\rho)$ είναι $f(x) > f(\rho) = 0$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E(\Omega) = \int_1^\rho f(x)dx = \int_1^\rho (-x+1+e^{-x})dx = \left[-\frac{x^2}{2}+x-e^{-x}\right]_1^\rho \Leftrightarrow$

$$E(\Omega) = -\frac{\rho^2}{2}+\rho-e^{-\rho}+\frac{1}{2}-1-e^{-1} = -\frac{\rho^2-2\rho+1}{2}-e^{-\rho}-e^{-1} = -\frac{(\rho-1)^2}{2}-e^{-\rho}-e^{-1} \quad (1)$$

Είναι $f(\rho) = 0 \Leftrightarrow -\rho+1+e^{-\rho} = 0 \Leftrightarrow e^{-\rho} = \rho-1$, οπότε η (1) γίνεται:

$E(\Omega) = -\frac{(\rho-1)^2}{2} - (\rho-1) + e^{-1}$ τετραγωνικές μονάδες.

24704.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^{x}$, $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο Α τον άξονα $x'x$, με τετμημένη $x_0\in(0,1)$. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$, είναι $E=e+(x_0-1)(1-\ln x_0)$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1}{x}+e^{x}$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x+e^{x})=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)=e$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f((0,1))=(-\infty,e)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $f((0,1))$, υπάρχει μοναδικό λόγω μονοτονία ς $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$. Επομένως η γραφική παράσταση της f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο Α τον άξονα $x'x$, με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

γ) Είναι $x_0\le x\le1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x_0)\le f(x)\le f(1)\Leftrightarrow0\le f(x)\le e$.

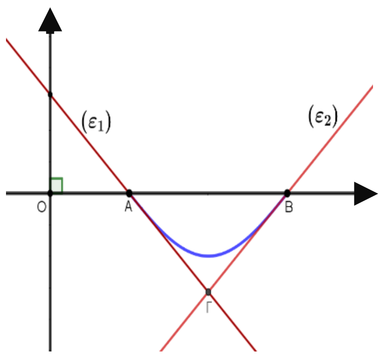
Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=\int_{x_0}^{1}f(x)dx=\int_{x_0}^{1}(\ln x+e^{x})dx=\int_{x_0}^{1}\ln x(x)'dx+\left[e^{x}\right]_{x_0}^{1}\Leftrightarrow$

$E=\left[x\ln x\right]_{x_0}^{1}-\int_{x_0}^{1}x\cdot\frac{1}{x}dx+e-e^{x_0}=-x_0\ln x_0-1+x_0+e-e^{x_0}$ (1)

Είναι $f(x_0)=0\Leftrightarrow\ln x_0+e^{x_0}=0\Leftrightarrow\ln x_0=-e^{x_0}$, οπότε η (1) γίνεται:

$E=-x_0\ln x_0-1+x_0+e+\ln x_0=e+(x_0-1)-\ln x_0(x_0-1)\Leftrightarrow E=e+(x_0-1)(1-\ln x_0)$

25235.Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στα σημεία $A\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ και $B\left(\frac{3\pi}{2},f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ έχουν σχεδιασθεί οι εφαπτόμενες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ αντίστοιχα της γραφικής παράστασης της f, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ.



α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ είναι $(\varepsilon_1): y=-x+\frac{\pi}{2}$ και $(\varepsilon_2): y=x-\frac{3\pi}{2}$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1) και (ε_2). (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1}{f(x)+x-\frac{\pi}{2}}$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ με $f'(x)=-\eta\mu x$.

Είναι $(\varepsilon_1): y-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y=-x+\frac{\pi}{2}$ και

$(\varepsilon_2): y-f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)\left(x-\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y=\left(x-\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y=x-\frac{3\pi}{2}$

β) Για τις συντεταγμένες του σημείου τομής Γ των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$, έχουμε: $\begin{cases} y=-x+\frac{\pi}{2} \\ y=x-\frac{3\pi}{2} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2y=-\pi \Leftrightarrow y=-\frac{\pi}{2}$

και $-\frac{\pi}{2}=x-\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow x=\pi$, άρα $\Gamma\left(\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$.

Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδό $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}(AB)|y_\Gamma|=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$.

Το εμβαδόν του χωρίου Ω_1 που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα x΄x είναι

$E(\Omega_1)=-\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\text{συν}x\,dx=-[\text{ημ}x]_{\pi/2}^{3\pi/2}=-(-1-1)=2$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E(\Omega)=(AB\Gamma)-E(\Omega_1)=\frac{\pi^2}{4}-2$.

γ) Επειδή η f είναι κυρτή στο $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ είναι $f(x)>-x+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(x)+x-\frac{\pi}{2}>0$.

Ακόμη $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(f(x)+x-\frac{\pi}{2}\right)=0$, οπότε αν θέσουμε $f(x)+x-\frac{\pi}{2}=u$, προκύπτει ότι

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1}{f(x)+x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{u\to0^+}\frac{1}{u}=+\infty$.

25259.Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, που είναι τέτοια, ώστε:

- **η γραφική παράσταση της f , να εφάπτεται της $\varepsilon: y=\frac{1}{4}$, στο $x_0=0$.**
- **είναι κυρτή και**
- **$f(1)=1$.**

α) Να αποδειχθεί ότι:

i. $f(0)=\frac{1}{4}$ και $f'(0)=0$. (Μονάδες 06) **ii. $\lim\limits_{x\to0}\frac{4f(x)-1}{\text{ημ}x\cdot f(x)}=0$. (Μονάδες 07)**

β) Επιπλέον δίνεται ότι η πρώτη παράγωγος της f είναι συνεχής.

i. Να αποδείξετε ότι $f'(x)\geq0$, για κάθε $x\in[0,1]$. (Μονάδες 06)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό Ε του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f', τον άξονα x′x και την ευθεία x=1. (Μονάδες 06)

Λύση

α) i. Επειδή το σημείο $A(0,f(0))$ ανήκει στην ευθεία ε, είναι $f(0)=\frac{1}{4}$.

Επειδή η ε εφάπτεται της C_f στο Α, είναι $f'(0)=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow f'(0)=0$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4f(x)-1}{\eta\mu x\cdot f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\left(f(x)-\frac{1}{4}\right)}{\eta\mu x\cdot f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\frac{f(x)-f(0)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}\cdot f(x)}=\dfrac{4f'(0)}{1\cdot f(0)}=0.$

β) i. Επειδή η f είναι κυρτή, η f΄ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $0\le x\le 1$ είναι $f'(x)\ge f'(0)=0$.

ii. Επειδή η f ΄είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1-1, οπότε $f'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=f'(0)\Leftrightarrow x=0$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E=\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

25757.Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=\begin{cases}(1-x)\eta\mu^2\left(\dfrac{1}{1-x}\right), & \text{αν } 0\le x<1\\ 0 & ,\ \text{αν } x=1\end{cases}}$

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. (Μονάδες 09)

β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x\in[0,1]$, ισχύει $0\le f(x)\le 1-x$. (Μονάδες 07)

γ) Να αποδειχθεί ότι για το εμβαδό Ε του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα x′x και τις ευθείες $x=0$, $x=1$ ισχύει $E<\frac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 09)

Λύση

α) Στο διάστημα $[0,1)$ η f είναι συνεχής ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x\in[0,1)$ είναι $0\le \eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\le 1\Leftrightarrow 0\le (1-x)\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\le 1-x$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0=f(0)$, επομένως η f είναι συνεχής στο [0,1].

β) Στο προηγούμενο σκέλος δείξαμε ότι για κάθε $x\in[0,1)$ είναι

$0\le (1-x)\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\le 1-x\Leftrightarrow 0\le f(x)\le 1-x$. Επειδή για x = 1 είναι $f(1)=0$ και $0\le f(0)\le 1-1$, η σχέση $0\le f(x)\le 1-x$ αληθεύει για κάθε $x\in[0,1]$.

γ) Επειδή η f είναι συνεχής στο [0,1] και $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[0,1]$, το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E=\int_0^1 f(x)dx$.

Για κάθε $x\in[0,1]$ είναι $f(x)\le 1-x$ και η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x\in[0,1]$, οπότε

$\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1(1-x)dx\Leftrightarrow E<\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=1-\frac{1}{2}\Leftrightarrow E<\frac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.